

Hessisches Kultusministerium

HESSEN



Landesabitur 2007

Bildungsland
Hessen



Beispielaufgaben 2005



Mathematik

Grundkurs

Beispielaufgabe A 5

Auswahlverfahren: siehe Hinweise

Einlese- und Auswahlzeit: 30 Minuten

Bearbeitungszeit: 180 Minuten (für die Gesamtprüfung)

Erlaubte Hilfsmittel:	Übliche Formelsammlung CAS
Sonstige Hinweise:	keine

I. Thema und Aufgabenstellung

Analysis

Aufgaben

Die Sinusfunktion $\sin(x)$ soll im Intervall $[0, \pi]$ durch drei unterschiedliche quadratische Funktionen f , g und h angenähert werden.

Die Funktionen f , g und h sollen dieselben Nullstellen besitzen wie die Sinusfunktion. Zusätzlich sollen die Funktionen die folgenden Eigenschaften haben:

- f besitzt dasselbe Maximum wie die Sinusfunktion.
 - g besitzt in den Nullstellen dieselbe Steigung wie die Sinusfunktion.
 - Die Graphen von h und der Sinusfunktion schließen beide den selben Flächeninhalt mit der x -Achse ein.
- a. Bestimmen Sie die Funktionsterme von f , g und h .
- b. Beurteilen Sie für jede der Funktionen f , g und h die Güte der Annäherung an die Sinusfunktion und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- c. Betrachten Sie die Funktionsterme

$$t_5(x) = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x \quad \text{und} \quad t_7(x) = -\frac{x^7}{7!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3!} + x$$

(Hinweis: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)

Zeichnen Sie die Graphen von t_5 und t_7 und der Sinusfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem und beschreiben Sie deren Verlauf.

Stellen Sie eine Vermutung über den Zusammenhang mit der Sinusfunktion auf.

Korrektur- und Bewertungshinweise - nicht für den Prüfungsteilnehmer bestimmt -

II. Erläuterungen

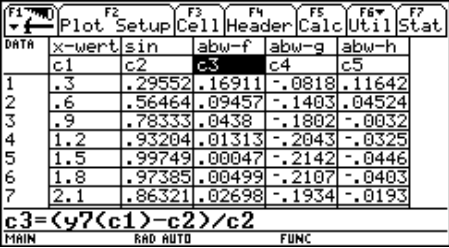
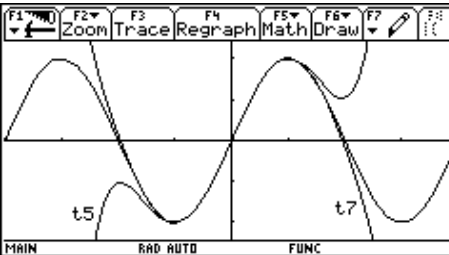
Zielsetzung

Im Mittelpunkt der Aufgabe steht die Herleitung und Beurteilung unterschiedlicher quadratischer Funktionen, die geeignet sind den Verlauf des Sinusgraphen im Intervall 0 bis π näherungsweise wiederzugeben und dabei bestimmten Bedingungen genügen.

Sowohl für den jeweiligen Ansatz zur Bestimmung der Funktionen als auch für die Beurteilung der "Passungsgüte" sind verschiedene Lösungswege möglich.

III. Lösungshinweise / IV. Bewertung und Beurteilung

	Erwartete Lösung	I	II	III	Bezug zum Lehrplan / Bemerkungen
a.	Bedingungen: $f(0)=0$, $f(\pi)=0$, $f(\pi/2)=1$, $f'(\pi/2)=0$ mögliche Ansätze: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ oder $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ oder $f(x) = a (x - \pi/2)^2 + 1$ Lösung: $f(x) = -4/\pi^2 (x - \pi/2)^2 + 1$	4	4		Es geht es um die Ermittlung von Funktions- termen nach vorgegeben Bedingungen. Je nach gewähltem Ansatz sind einige der Bedingungen zur Bestimmung der Parame- ter nicht mehr notwendig. Alternativer Ansatz für f, g und h: $f(x) = a \cdot x^2 - a \cdot \pi \cdot x$
	Bedingungen: $g(0)=0$, $g(\pi)=0$, $g'(0)=\cos(0)$, $g'(\pi)=\cos(\pi)$ $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ oder $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ Lösung: $g(x) = -1/\pi \cdot x^2 + x$	3	3		Wenn die Reihenfolge der Funktionen geän- dert wird, bzw. wenn f(x) nicht berechnet wird, können die Punkte entsprechend ange- passt werden.
	Bedingungen: $h(0)=0$, $h(\pi)=0$, SOLVE($h(0)=0$ and $a/3 \cdot \pi^3 + b/2 \cdot \pi^2 = 2, \{a, b\}$) Lösung: $h(x) = -12/\pi^3 \cdot x^2 + 12/\pi^2 \cdot x$	2	6		Das Integral sowie das Gleichungssystem werden mit dem Rechner gelöst.

b.	<p>Auswahl eines geeigneten Beurteilungskriteriums, z. B. Differenz oder prozentuale Abweichung der Funktionswerte.</p>  <p>Alternative: Betrachtung des Integrals</p> $\int_0^{\pi} (s(x) - f(x))^2 dx$ <p>für f, g und h.</p> <p>Entscheidung: h(x) passt am besten.</p>	3	3	4	<p>Die rein visuelle Betrachtung der Graphen allein reicht nicht aus.</p> <p>Das Arbeiten mit Tabellen bietet sich an.</p>
c.	<p>Skizze von $s(x) = \sin(x)$, $t_5(x)$ und $t_7(x)$.</p>  <p>Die Funktionen nähern die Sinusfunktion in der Umgebung des Nullpunktes an, t_7 besser als t_5, Vermutung: zusätzliche Terme $\frac{x^9}{9!}$, $\frac{x^{11}}{11!}$, ... verbessern die Annäherung.</p>	4	3	1	<p>Die Behandlung von Taylorreihen wird nicht vorausgesetzt.</p> <p>Beschreibung und Interpretation von Graphen.</p>
	Σ 40	16	19	5	